Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2018/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse

L'exercice étudie le départ d'un wagon propulsé électromagnétiquement dans un tube à basse pression, avec pour objectif d'atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. La distance parcourue est modélisée par une fonction, puis l'étude porte sur une équation différentielle, les variations et la vitesse, ainsi que sur l'aire d'une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène (E0) : y′ − 0,2y = 0.

L'équation homogène s'écrit sous la forme donnée y′ + ay = 0, avec a = −0,2. La solution générale est donc une constante multipliée par e^{-at}. Comme −a = 0,2, cela donne une exponentielle croissante sur l'intervalle demandé. La constante peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$y(t) = k\,e^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.**

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = −15t − 75 est une solution de l'équation différentielle (E) : y′ − 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : g′(t) = −15. En remplaçant y par g dans le membre de gauche de l'équation, on obtient g′(t) − 0,2g(t) = −15 − 0,2(−15t − 75). Le terme constant s'annule et le terme en t vaut 3t, qui est bien le membre de droite de (E). La fonction g est donc une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **g′(t) − 0,2g(t) = 3t : la fonction g est bien solution de (E).**

Question 3°. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Une solution particulière de (E) est g(t) = −15t − 75. À toute solution particulière, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée, trouvées à la question précédente. Ce principe fournit toutes les solutions de (E), car la différence entre deux solutions de (E) vérifie l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Les solutions sur [0, +∞[sont $y(t) = k\,e^{0,2t} - 15t - 75$, où $k \in \mathbb{R}$.**

Question 4°. Au temps t = 0, le wagon est au point de départ. Déterminer la fonction f, solution de (E), vérifiant la condition initiale f(0) = 0.

On part de la solution générale de (E) : $f(t) = k\,e^{0,2t} - 15t - 75$. À t = 0, l'exponentielle vaut 1 et le terme en t disparaît. La condition f(0) = 0 impose donc k − 75 = 0. On remplace ensuite k par 75 pour obtenir la fonction recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.**

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions fournies de f et de f', résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Comme 15 est positif, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. L'exponentielle est au moins égale à 1 lorsque son exposant est positif ou nul, donc lorsque $t \geq 0$. Cette condition est satisfaite sur tout l'intervalle étudié.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **L'inéquation f'(t) ≥ 0 est vérifiée pour tout $t \in [0, 3]$.**

Question 1° b). Déduire de la résolution précédente les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est positive sur [0, 3] et ne s'annule qu'à l'extrémité t = 0. Ainsi, f est croissante sur tout l'intervalle. Ses valeurs aux bornes se calculent avec l'expression de f donnée dans le sujet.

t	0	3
f(t)	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **f est croissante sur [0, 3], de 0 km à environ 16,659 km.**

Question 2°. Sachant que f(t) représente la distance parcourue par le wagon, en kilomètres, à l'instant t exprimé en minutes, déterminer la distance parcourue au bout d'une minute et arrondir au dixième.

La distance après une minute est f(1). En remplaçant t par 1 dans la fonction, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. La distance étant demandée au dixième de kilomètre, on arrondit cette valeur à 1,6 km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Au bout d'une minute, le wagon a parcouru 1,6 km au dixième près.**

Question 3° a). La vitesse du wagon à l'instant t, en kilomètres par minute, est donnée par f'(t). Déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par la dérivée de la distance. À t = 2 minutes, le calcul formel fournit $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$ kilomètres par minute. L'arrondi au dixième donne 7,4 kilomètres par minute.

> On évalue donc f' en t = 2, et non f(2), qui représenterait une distance.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **À t = 2 minutes, la vitesse est de 7,4 km/min au dixième près.**

Question 3° b). Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Il faut atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. En kilomètres par minute, la vitesse cible vaut 400/60 = 20/3. On résout $f'(t) = 20/3 : 15(e^{0,2t} - 1) = 20/3$, d'où $t = 5 \ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Cet instant est inférieur à deux minutes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, l'objectif est atteint : la vitesse de 400 km/h est atteinte après environ 1,839 minute.

Question 4°. Parmi les trois propositions, choisir l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Recopier la réponse choisie sans justification.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour pente f'(2). En utilisant la formule fournie, son ordonnée à l'origine se simplifie en $45e^{0,4} - 75$. Parmi les trois réponses proposées, seule la troisième possède à la fois cette pente et cette ordonnée à l'origine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les propositions, l'aire A1 du rectangle OPQR en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle OPQR s'étend de x = 0 à x = 3 et de y = 0 à y = 2,25. Sa largeur est donc 3 unités et sa hauteur 2,25 unités. L'aire est le produit de ces deux dimensions, conformément aux proportions et aux cotes visibles dans la figure.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie de $g(x) = 27x/(2x^2 + 18)$, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur [0, 3], donc l'aire recherchée est l'intégrale de g sur cet intervalle. Avec la primitive fournie, on évalue ses valeurs aux bornes :

1. $A_2 = (27/4)[\ln(x^2 + 9)]$ de 0 à 3.
2. $A_2 = (27/4)(\ln 18 - \ln 9) = (27/4)\ln 2 \approx 4,679$.

L'unité d'aire correspond ici à un mètre carré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = (27/4)\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Question 3°. À partir des questions précédentes, déduire l'aire A de la pièce représentée, en tenant compte de sa symétrie, et arrondir au millième.

La pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Dans la moitié droite, l'aire hachurée est celle du rectangle OPQR moins l'aire sous la courbe g entre 0 et 3. On double donc la différence entre les aires calculées précédemment. L'unité graphique vaut un mètre sur chaque axe, donc le résultat s'exprime en mètres carrés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A = 2(A_1 - A_2) = 2(6,75 - (27/4)\ln 2) \approx 4,143$ m².

2. Obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle dans une population de smartphones, puis modélise le nombre d'appareils non réparables dans un lot de modèle A. Il se termine par un test bilatéral visant à vérifier si la proportion de personnes attribuant une obsolescence programmée à la marque B correspond à un résultat de sondage.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des pourcentages fournis pour les obsolescences technique et logicielle dans une population de 200 smartphones, ainsi que de leur recoupement, compléter le tableau d'effectifs.

Sur 200 smartphones, 3 % représentent 6 appareils touchés techniquement et 8 % représentent 16 appareils touchés logiciellement. Parmi ces 16 appareils, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 smartphones. Les autres effectifs se déduisent des totaux : 4 sont uniquement touchés techniquement, 14 uniquement logiciellement et 180 ne sont touchés par aucun des deux types.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200
	200		

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour T : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence technique » et L : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant que L est réalisé.

Les pourcentages de l'énoncé donnent directement les probabilités des événements simples : 3 % des smartphones sont touchés par l'obsolescence technique et 8 % par l'obsolescence logicielle. La donnée de recoupement précise que, parmi les smartphones touchés logiciellement, 12,5 % le sont aussi techniquement. On obtient donc les trois probabilités demandées, en écrivant la dernière comme une probabilité conditionnelle de T sachant L.

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$, $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer P(T ∩ L).

Pour obtenir la probabilité qu'un smartphone soit touché par les deux types d'obsolescence, on utilise la probabilité conditionnelle de T sachant L. On multiplie la probabilité d'être touché logiciellement par la proportion, parmi ces smartphones, également touchée techniquement. Le résultat correspond à 1 % de la population, soit 2 appareils parmi les 200 du tableau.

$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}010.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}010.$

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer P(T ∪ L).

Être touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence correspond à l'événement $T \cup L$. En additionnant les probabilités de T et de L, les smartphones touchés par les deux types sont comptés deux fois. Il faut donc soustraire une fois la probabilité de leur intersection, calculée à la question précédente.

$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}10$, soit 10 %.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer P_T(L), la probabilité de L sachant que T est réalisé.

On cherche ici la proportion des smartphones touchés techniquement qui sont aussi touchés logiciellement. Par définition, cette probabilité conditionnelle est le quotient de la probabilité de l'intersection par la probabilité de T. Les deux événements étant présents dans 2 appareils sur les 6 touchés techniquement, on trouve un tiers.

$P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}03} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333.$

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui associe à chaque lot de 50 smartphones le nombre d'appareils non réparables, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : un smartphone est non réparable avec la probabilité 0,045. Le stock étant suffisamment important, l'énoncé assimile les prélèvements à des tirages avec remise, donc les 50 épreuves sont indépendantes. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables au cours de ces 50 épreuves identiques.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}045).$

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous les appareils soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables si aucun des 50 appareils prélevés n'est non réparable. Pour un appareil, la probabilité d'être réparable vaut $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Les tirages étant supposés indépendants, la probabilité recherchée est le produit de cette probabilité pour les 50 appareils, soit la probabilité $P(X = 0)$.

$P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100$, arrondi au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) \approx 0{,}100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme qui additionne les probabilités binomiales pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S.

On calcule successivement les probabilités pour $i = 0, 1, 2, 3$, puis on ajoute chacune à la somme S déjà obtenue. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième. Les sommes cumulées correspondent à l'algorithme, qui commence avec $S = 0$ et additionne les probabilités de chaque rang jusqu'à 3.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau binomial complété

:i-dessous.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,1	0,236	0,272	0,205
S	0,1	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes cumulées : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, S contient la somme des probabilités correspondant aux valeurs 0, 1, 2 et 3 de X. D'après les calculs de la question précédente, cette somme vaut environ 0,813. Elle représente la probabilité qu'un lot comporte au plus 3 smartphones non réparables, c'est-à-dire $P(X \leq 3)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S \approx 0{,}813$: environ 81,3 % des lots ont au plus 3 smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ici, le nombre de prélèvements est 50 et la probabilité qu'un smartphone soit non réparable est 0,045. Le calcul donne le nombre moyen d'appareils non réparables par lot lorsque l'on répète un grand nombre de prélèvements de 50 smartphones.

$E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2{,}25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 − h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Une seule des trois propositions est exacte.

Sous H_0, la fréquence F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central de probabilité 0,95 correspond à environ 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Le demi-écart vaut donc $1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, soit 0,07 arrondi au centième. C'est la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}07$, troisième proposition.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Le test est bilatéral au seuil de 5 %. Sous H_0, on conserve l'hypothèse si la fréquence observée appartient à l'intervalle central de 95 %, centré sur 0,55. Avec la valeur de h arrondie au centième, cet intervalle a pour bornes $0{,}55 - 0{,}07 = 0{,}48$ et $0{,}55 + 0{,}07 = 0{,}62$.

En dehors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Conserver H_0 si $0{,}48 \leq F \leq 0{,}62$; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Dans l'échantillon aléatoire de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Déterminer la conclusion du test.

La fréquence observée est le quotient du nombre de réponses positives par le nombre de personnes interrogées : $f = \dfrac{76}{180} \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation. La fréquence observée appartient donc à la région de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %.

On rejette ainsi H_0 : $p = 0{,}55$; l'échantillon indique une proportion inférieure à 55 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f \approx 0{,}422 < 0{,}48$: on rejette H_0. La proportion observée est inférieure à 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Elle étudie le départ d'un wagon de train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones, en évaluant équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' - 0{,}2y = 0$, les solutions sont de la forme $y(t) = ke^{0{,}2t}$.
- Si $f(t)$ représente une distance, la vitesse instantanée est donnée par la dérivée $f'(t)$.
- Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors son espérance est $E(X) = np$.
- Pour deux événements T et L, $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L)$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités de distance, de temps et de vitesse avant de comparer à l'objectif de 400 km/h.
- Pour une aire, vérifier les bornes, la région représentée sur le schéma et la symétrie de la pièce.
- Contrôler les totaux des lignes, des colonnes et le total général du tableau d'effectifs.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux deux bornes de l'intervalle de décision.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la vitesse du wagon à un instant donné ?

La distance parcourue est modélisée par f(t), donc la vitesse instantanée est donnée par f'(t). Évaluez cette dérivée à l'instant demandé. Pour comparer à 400 km/h, convertissez les kilomètres par minute en kilomètres par heure en multipliant par 60.

Q : Comment reconnaître une loi binomiale dans la partie sur les smartphones ?

On compte les appareils non réparables parmi 50 prélèvements, avec deux issues possibles et une probabilité constante de 0,045. Le stock est supposé assez important pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise : X suit donc une loi binomiale.

Q : Comment gérer les points et le temps pendant cette épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Commencez par les questions dont la méthode est sûre, puis réservez du temps aux calculs, aux justifications et à la vérification des arrondis.

Q : Quels critères de présentation faut-il respecter pour les calculs et le test ?

Présentez les formules utiles, les étapes de calcul et une conclusion liée au contexte. Respectez les arrondis indiqués, précisez les unités et, pour le test, énoncez la règle de décision avant de conclure à partir de la fréquence observée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2018/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Services et Prestations des Secteurs Sanitaire et Social : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.