Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et intervalle de confiance** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2022/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f. Les questions mobilisent une équation différentielle, l'étude de la fonction, le calcul d'une distance parcourue, un développement limité et l'équation d'une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

1. La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.
2. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Elle vérifie l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant la solution particulière $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène. On obtient donc la famille indiquée ci-dessous.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans cette famille, la condition initiale donne $f(0) = 5 + C = 20$, donc $C = 20 - 5 = 15$. En remplaçant C dans l'expression générale, on obtient la solution cherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$, et la limite de $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 5 lorsque $t \to +\infty$, la courbe C admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse décroît de $20\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ et tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$. Pour tout instant fini, elle reste donc supérieure à $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ et n'atteint pas 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

1. En dérivant F, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$.
2. Or $(-18,75)(-0,8) = 15$, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Question 4. b. À l'aide de l'intégrale de f, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance est $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur, exprimée en mètres, s'arrondit au centimètre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique proposition exacte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

La proposition exacte est la troisième : son terme de reste est $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est bien un reste négligeable devant t^2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le point de tangence est $(0; f(0)) = (0; 20)$, et le coefficient directeur de la tangente est $f'(0) = -12e^0 = -12$. L'équation de la tangente en ce point est donc $y = f'(0)t + f(0)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = -12t + 20.$

2. Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et intervalle de confiance

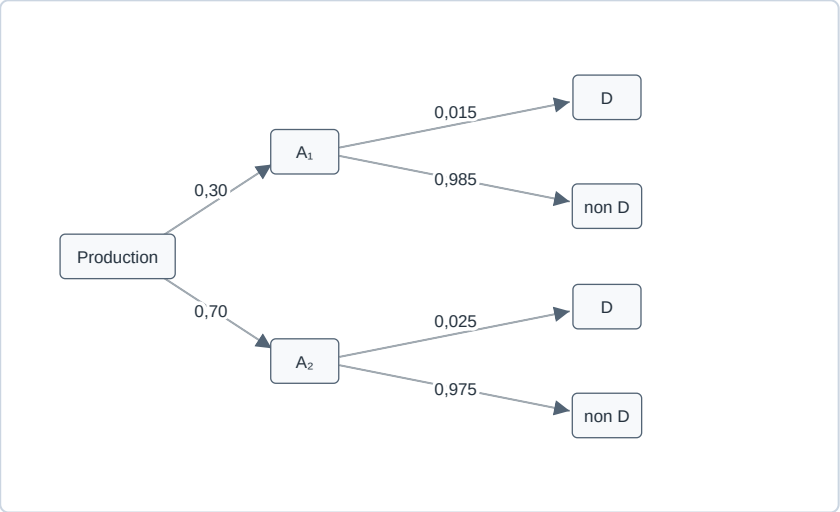
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de bon fonctionnement des tubes modélisée par une loi exponentielle de paramètre 0,001, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des parts de production et des taux de défaut des deux ateliers, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre commence par les proportions de production : 0,30 pour l'atelier 1 et 0,70 pour l'atelier 2. Depuis chaque atelier, les branches « défaut » portent le taux indiqué dans l'énoncé. Les branches « sans défaut » portent les probabilités complémentaires : 0,985 pour l'atelier 1 et 0,975 pour l'atelier 2. Les probabilités des deux branches issues d'un même nœud totalisent 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les branches issues des ateliers indiquent les probabilités conditionnelles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : atelier 1 (0,30), atelier 2 (0,70) ; taux de défaut respectifs : 0,015 et 0,025.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit P(A₁ ∩ D).

La probabilité que le tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux se calcule en multipliant la proportion produite par cet atelier par son taux de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Le résultat est une probabilité rapportée à la production totale, et non à la seule production de l'atelier 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. À partir des données de production et des taux de défaut, déterminer la probabilité P(D) qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut.

Un défaut peut provenir de l'un ou l'autre atelier. On additionne donc les probabilités des deux chemins menant à D : $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025$. La première contribution vaut 0,0045 et la seconde 0,0175. Ainsi, parmi tous les tubes produits, la probabilité qu'un tube choisi au hasard soit défectueux est 0,022.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

Parmi les tubes sans défaut, la probabilité de provenir de l'atelier 2 est une probabilité conditionnelle. Le numérateur vaut $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité d'absence de défaut au dénominateur est $1 - P(D) = 1 - 0,022 = 0,978$. On obtient donc $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978 \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda$. Avec $\lambda = 0,001$, on calcule $E(T) = 1/0,001 = 1\,000$ heures. Cette espérance correspond à la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes dans le stock. Elle ne signifie pas que chaque tube fonctionnera exactement pendant cette durée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule donnée pour la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour $t = 8\,000$ heures, $P(T < 8000) = 1 - e^{-0,001 \times 8000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9996645$. La loi étant continue, remplacer $T \leq 8000$ par $T < 8000$ ne change pas la probabilité. L'arrondi au centième donne le résultat demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8000) \approx 1,00$ au centième.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser t heures est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. En prenant $t = 10\,000$ et $\lambda = 0,001$, on obtient $P(T > 10000) = e^{-0,001 \times 10000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième comme demandé, cette probabilité est 0,00, bien que sa valeur exacte soit positive.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur les 1 000 rivets contrôlés, 975 sont conformes, donc $\hat{p} = 975/1000 = 0,975$. Cette fréquence estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production. Elle correspond à 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur la fréquence observée pour la proportion p, puis arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La formule fournie utilise la fréquence observée $f = 0,975$ et l'effectif $n = 1000$:

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

Les bornes obtenues sont environ 0,965323 et 0,984677. En arrondissant chacune au millième, on obtient l'intervalle de confiance demandé au niveau de 95 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$[0,965 \; ; \; 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Elle étudie le freinage d'un chariot, la production et la durée de vie de tubes fluorescents, ainsi que la conformité de rivets, en mobilisant équations différentielles, analyse, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, avec a non nul et b constant, la solution générale est y(t) = Ce^(-at) + b/a.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ vaut 5 et l'asymptote horizontale est y = 5.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % donné est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation homogène de la solution particulière constante dans l'équation différentielle.
- Pour savoir si le chariot s'arrête, examiner la limite de sa vitesse, qui tend vers 5 m/s et non vers zéro.
- Dans une probabilité conditionnelle, placer au dénominateur la probabilité de l'événement indiqué après « sachant que ».
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser n = 1 000 et f = 0,975, puis arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

On résout d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, dont les solutions sont Ce^(-0,8t). On ajoute la solution particulière constante 5, puis on utilise la condition f(0) = 20 pour déterminer C.

Q : Comment calculer la probabilité d'un atelier sachant que le tube n'a pas de défaut ?

On applique $P(A_2 \mid \text{non D}) = P(A_2 \cap \text{non D}) / P(\text{non D})$. Le numérateur est la probabilité d'un tube issu de l'atelier 2 et sans défaut; le dénominateur est la probabilité qu'un tube soit sans défaut.

Q : Comment répartir son temps dans cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points, chacun divisé en trois parties pouvant être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Quels arrondis et éléments de présentation faut-il respecter ?

Montrez les formules utilisées et reliez les résultats au contexte. La distance est à arrondir au centimètre, les probabilités de la partie B à 10^{-2} près et les bornes de l'intervalle de confiance à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2022/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Services et Prestations des Secteurs Sanitaire et Social : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.