Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques, groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale** (12 questions) **Page 3**

2. **Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace** (9 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2022/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine commence à freiner à 20 m·s⁻¹ et sa vitesse est modélisée par une fonction qui vérifie une équation différentielle. L'étude porte sur son évolution, la distance parcourue pendant la première seconde et le développement limité de la fonction vitesse.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$, sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui correspond au second membre de l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. On ajoute à cette solution générale toutes les solutions de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0,8t}$, où k est réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B

Question 1.a. À partir de l'expression de f, démontrer que sa limite lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le premier terme tend vers zéro et le second reste constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) < 0$: f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t) \to 5$ lorsque $t \to +\infty$.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. À partir de l'étude de f, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout temps fini, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant l'intégrale de la vitesse entre deux instants, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$, soit environ $15,3251$ mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C

Question 1. Parmi les expressions proposées, recopier l'unique développement limité correct de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le développement limité à l'ordre 2 ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Il s'agit de la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour pente -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace

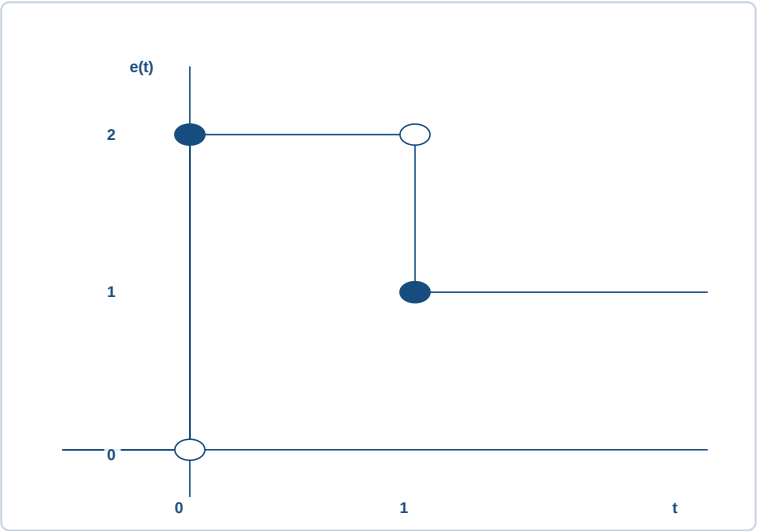
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). Il faut tracer et transformer le signal d'entrée, puis déterminer et représenter le signal de sortie à l'aide des transformées de Laplace.

Partie A

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction d'entrée e(t).

Comme le signal est causal, il vaut 0 pour t<0. À t=0, U(0)=1, donc e(0)=2. Pour 0≤t<1, e(t)=2 ; à partir de t=1, e(t)=2−1=1. Le tracé montre les sauts et les points ouverts ou fermés aux instants concernés.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t)=0 pour t<0, 2 pour 0≤t<1, puis 1 pour t≥1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de U(t) est 1/p, et celle de U(t−1) est e^{-p}/p. Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de e(t)=2U(t)−U(t−1), d’où $E(p)=2/p-e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Partie B

Question 1. En utilisant la relation entre S(p), H(p) et E(p), démontrer que $S(p) = 2/[p(p + 1)] − e^{-p}/[p(p + 1)]$.

1. La relation du système est S(p)=H(p)E(p).

2. En remplaçant H(p) par 1/(p+1) et E(p) par 2/p−e^{-p}/p, on obtient S(p)=2/[p(p+1)]−e^{-p}/[p(p+1)].

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> S(p)=2/[p(p+1)]−e^{-p}/[p(p+1)].

Question 2. Vérifier la décomposition en éléments simples 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Mettons le membre de droite au même dénominateur :
$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}$.
L'égalité demandée est donc vérifiée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^{-p}/p et de e^{-p}/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Le formulaire donne les transformées usuelles et la propriété de retard d'une unité. On obtient :

- $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$;
- $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$;
- $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$;
- $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les quatre fonctions inverses sont celles listées ci-dessus.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Pour 0≤t<1, les termes retardés, multipliés par U(t−1), sont nuls. Il reste donc $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur [0 ; 1[, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.**

On utilise la formule donnée pour t≥1 et on remplace t par 1 : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est environ 1,264 ; arrondie au dixième, elle vaut 1,3.

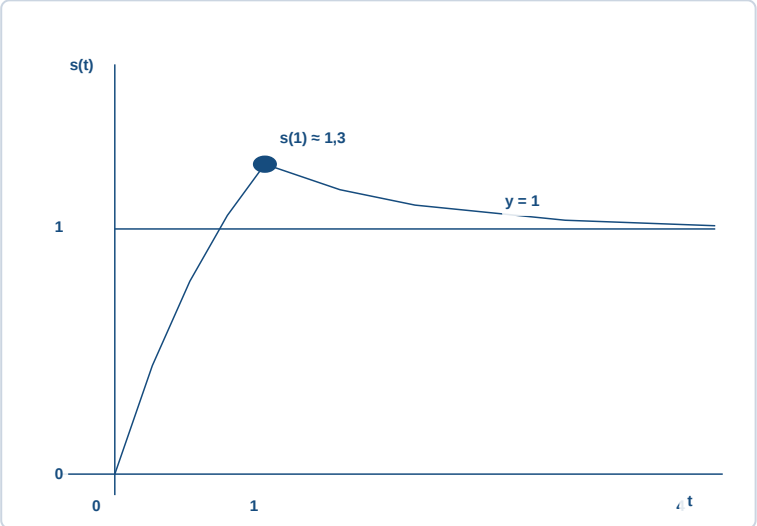
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Pour 0≤t<1, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ croît de 0 jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1,264$. À partir de t=1, la formule donnée décroît vers 1. Le tracé représente les deux branches, raccordées au point d'abscisse 1, et l'asymptote horizontale y=1.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe croît jusqu'à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote y=1.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour t≥1, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme $e^{-t} \to 0$ lorsque t tend vers +∞, le terme exponentiel s'annule et la limite est la constante restante.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les thèmes sont le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, avec équations différentielles, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- Le retard temporel d'une unité, f(t − 1)U(t − 1), correspond au facteur e^{-p} dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir trouvé la famille des solutions de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale pour déterminer la constante.
- Pour le tableau de variation, étudier le signe de la dérivée et inscrire les valeurs ou limites aux bornes de l'intervalle.
- Pour une distance, calculer $F(t_1) - F(t_0)$ et donner le résultat dans l'unité demandée, avec l'arrondi requis.
- Dans les transformées de Laplace, appliquer correctement la propriété de retard aux termes multipliés par e^{-p}.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la transformée de Laplace du signal d'entrée ?

Utilisez la linéarité et transformez chaque échelon séparément. Le formulaire donne L{U(t)} = 1/p et $L\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$; combinez ensuite les deux termes de e(t).

Q : Comment retrouver le signal de sortie à partir de S(p) ?

Décomposez d'abord les fractions rationnelles en éléments simples, puis appliquez les transformées inverses du formulaire. Pour les termes contenant e^{-p}, utilisez la propriété de retard d'une unité.

Q : Comment répartir le temps de cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et compte deux exercices de 10 points. Réservez du temps aux calculs, aux tracés sur le document-réponse et à la vérification des arrondis, des unités et des expressions obtenues.

Q : Quel coefficient et quel barème faut-il retenir ?

Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Chaque exercice vaut 10 points ; le sujet ne donne pas de répartition détaillée des points par question.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2022/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Services et Prestations des Secteurs Sanitaire et Social : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.