Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1 en Analyses de biologie médicale et Biotechnologies ; 1,5 en Europlastics et composites ; 2 en Bio analyses et contrôles et Bioqualité**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical** (13 questions) — **Page 3**

2. **Défauts d'approvisionnement, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2022/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, deux modèles décrivent l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical depuis 2013. Les données observées sont utilisées pour un ajustement exponentiel, puis un modèle reposant sur une équation différentielle est étudié.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Année	Rang k	N (milliers)	y = ln(N - 30)
2013	0	56,25	3,268
2014	1	58,1	3,336
2015	2	60,5	3,418
2016	3	63	3,497
2017	4	65,8	3,578
2018	5	68,7	3,656
2019	6	72	3,738
2020	7	75,5	3,818
2021	8	79,3	3,898

On applique y = ln(N - 30) à chaque valeur du tableau. Par exemple, en 2013 : ln(56,25 - 30) = ln(26,25) ≈ 3,268. Les résultats sont arrondis au millième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour k = 0 à 8 : y = 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, avec les rangs de 0 à 8 et les valeurs du tableau, donne une pente d'environ 0,079 et une ordonnée à l'origine d'environ 3,261. En arrondissant chaque coefficient au centième, on obtient a = 0,08 et b = 3,26. L'équation demandée est donc établie au niveau de précision imposé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Droite d'ajustement, coefficients arrondis au centième : y = 0,08k + 3,26.

Question 2. b. À partir de l'équation de droite obtenue, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Le changement de variable donne y = ln(N - 30). Avec la droite d'ajustement, ln(N - 30) = 0,08k + 3,26. En exponentiant, $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$, et $e^{3,26} \approx 26,05$. Le nombre N étant exprimé en milliers, on retrouve bien le modèle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes équipées.

Question 3. a. Avec le modèle proposé, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

En 2026, le rang vaut k = 2026 - 2013 = 13. On remplace k par 13 dans le modèle : $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08 \times 13} \approx 103,701$. Ce résultat est exprimé en milliers de personnes ; après conversion et arrondi au millier près, on obtient 104 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, le modèle prévoit environ 104 000 personnes équipées de l'implant.

Question 3. b. Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, indiquer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.

Lorsque k tend vers +∞, $e^{0,08k}$ tend vers +∞ ; le modèle exponentiel prévoit donc $N(k) \to +\infty$. Or le pays compte 60 millions d'habitants : le nombre de personnes équipées ne peut pas dépasser cette population. À long terme, la prévision du modèle devient donc incompatible avec la situation réelle et le modèle ne reste pas valide.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : N(k) tend vers +∞, alors que la population est limitée à 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1. a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.

L'équation homogène s'écrit y′ = -0,05y. Une fonction exponentielle de la forme Ce^{rt} vérifie cette équation lorsque r = -0,05. Toutes les solutions sur [0 ; +∞[s'obtiennent donc en faisant varier la constante réelle C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur [0 ; +∞[, toutes les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante, sa dérivée est nulle. En notant cette constante c, l'équation devient 0,05c = 0,05. On obtient c = 1 ; la fonction constante égale à 1 est donc une solution particulière de (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

Une solution constante de (E) est y(t) = 1.

Question 1. c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. Une solution particulière de (E) est la fonction constante égale à 1.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $Ce^{-0,05t}$.
3. La somme d'une solution particulière et d'une solution homogène donne toutes les solutions de (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur [0 ; +∞[, $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

La solution générale est $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$. En utilisant g(0) = 8, on obtient 1 + C = 8, donc C = 7. En remplaçant C dans la solution générale, on trouve l'expression de g sur l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années écoulées depuis 2013 et où f(t) est exprimé en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le temps écoulé entre 2013 et 2026 est t = 2026 - 2013 = 13 ans. Le modèle donne $f(13) = 450/(1 + 7e^{-0,05 \times 13})$ ≈ 96,685 milliers. En convertissant en personnes puis en arrondissant au millier près, on obtient 97 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Selon le modèle, environ 97 000 personnes seront équipées de l'implant en 2026.

Question 3. Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'évolution du nombre de personnes équipées.

Lorsque t tend vers +∞, $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Ainsi, le dénominateur $1 + 7e^{-0,05t}$ tend vers 1 et f(t) tend vers 450. Comme f est exprimée en milliers de personnes, le modèle prévoit une stabilisation à long terme autour de 450 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

lim f(t) = 450 milliers, soit 450 000 personnes équipées à long terme.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) fournie, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \geq 0$, l'expression fournie est $f'(t) = 315e^{-0,05t}/[2(1 + 7e^{-0,05t})^2]$. L'exponentielle, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs ; donc $f'(t) > 0$ sur [0 ; +∞[. La fonction f est strictement croissante : selon ce modèle, le nombre de personnes équipées augmente avec le temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante sur [0 ; +∞[; le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

1. Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $450/(1 + 7e^{-0,05t}) > 120$, soit $e^{-0,05t} < 2,75/7$.
2. On obtient $t > \ln(2,75/7)/(-0,05) \approx 18,69$.

Le premier rang entier supérieur à cette durée est 19, soit 19 ans après 2013.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le seuil est dépassé à partir de 2032, correspondant au rang entier t = 19.

2. Défauts d'approvisionnement, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite : la probabilité que la file ne se vide pas, l'événement où la file se vide mais pas le réservoir, la probabilité que les deux soient vides au moins une fois et la probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Aucune justification n'est demandée.

La file ne se vide pas avec la probabilité complémentaire de l'événement A. Les événements A et B étant indépendants, la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est leur produit. Le défaut d'approvisionnement correspond à l'événement $A \cup B$.

Phrase	Information
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \bar{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,0494

✓ RÉPONSE À RETENIR

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller sur une durée de 200 jours

Question 1. Donner sans justification la loi suivie par X, qui compte les jours de panne au cours d'une période de 200 jours consécutifs, et préciser ses paramètres.

Chaque jour constitue une épreuve de Bernoulli : la panne survient avec la probabilité constante 0,025. Les pannes des différents jours sont indépendantes. Ainsi, le nombre de jours de panne sur 200 jours suit une loi binomiale de paramètres égaux au nombre d'épreuves et à la probabilité d'une panne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Partie B

Question 2. a. Justifier que la loi de Poisson utilisée pour approcher la loi de X a pour paramètre λ = 5.

Pour approcher une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de Poisson, le paramètre est $\lambda = np$. Ici, la période comporte 200 jours et la probabilité de panne un jour donné est 0,025. Le produit donne le paramètre de la loi de Poisson utilisée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

Question 2. b. Calculer P(Y ≤ 10), où Y suit la loi de Poisson de paramètre λ, et donner le résultat arrondi à 10^{-3}.

Pour $Y \sim \mathcal{P}(5)$, on additionne les probabilités des valeurs entières de 0 à 10, données par $P(Y = k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!}$. Cette somme vaut environ 0,986305 ; l'arrondi demandé au millième est 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2. c. La représentation graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule donnée pour P(Y = k), indiquer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.

Pour $k = 15$, la formule donne $P(Y = 15) = \frac{5^{15}e^{-5}}{15!}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : cette probabilité est donc positive, même si elle est trop petite pour être visible sur le graphique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. À partir du tableau des volumes mesurés sur l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.

Les volumes et effectifs du tableau sont 73, 74, 75, 76 et 77 cL, avec respectivement 17, 20, 43, 13 et 7 bouteilles. La moyenne pondérée est $\frac{73\times17+74\times20+75\times43+76\times13+77\times7}{100}$. L'écart type calculé sur les 100 valeurs est arrondi au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{x} = 74{,}73$ cL et $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Partie C

Question 2. a. Sous l'hypothèse H₀ : m = 75, déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z̄ ≤ 75 + h) soit égal à 0,95 à 10^{-2} près, en utilisant l'écart type estimé de 0,11.

Sous H_0, $\bar{Z}$ suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. L'intervalle central à 95 % utilise le quantile normal d'ordre 0,975, égal à environ 1,96. La demi-largeur cherchée vaut donc $h = 1{,}96 \times 0{,}11$, arrondie au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2. b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % portant sur H₀ : m = 75 et H₁ : m ≠ 75.

On compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0. Avec la demi-largeur arrondie $h = 0{,}22$, cet intervalle est $[75 - 0{,}22\,;\ 75 + 0{,}22]$. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0 au seuil de 5 % ; sinon, on la rejette.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $\bar{x} \in [74{,}78\,;\ 75{,}22]$; la rejeter sinon.

Question 2. c. À partir des résultats de l'échantillon, indiquer si l'hypothèse H₀ : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne de l'échantillon est 74,73 cL. La règle du test consiste à vérifier si elle appartient à l'intervalle $[74{,}78\,;\ 75{,}22]$. Comme $74{,}73 < 74{,}78$, la moyenne est hors de cet intervalle : au seuil de 5 %, les résultats conduisent à rejeter l'hypothèse H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : $74{,}73 < 74{,}78$, donc on rejette H_0.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Son coefficient dépend de la spécialité. Elle étudie l'équipement en implants médicaux et une machine à embouteiller, mobilisant ajustement exponentiel, équations différentielles, probabilités, loi de Poisson et test bilatéral.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Avec y = ln(N - 30), le modèle N(k) = 30 + Ae^(ak) devient une relation affine : y = ak + ln(A).
- La solution d'une équation différentielle y' + ay = b s'obtient en ajoutant une solution particulière constante à la solution générale de l'équation homogène.
- Pour 200 jours indépendants et une probabilité de panne de 0,025 par jour, X suit B(200 ; 0,025) et l'approximation de Poisson a pour paramètre 5.
- Dans un test bilatéral à 95 %, la moyenne observée se compare à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les modèles N et f donnent un nombre de personnes en milliers.
- Repérer l'origine du temps : 2026 correspond à 13 années après 2013.
- Pour la loi de Poisson, calculer le paramètre d'approximation par n × p.
- Pour le test bilatéral, comparer la moyenne observée aux deux bornes de l'intervalle centré en 75 cL.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment transformer les données pour obtenir le modèle exponentiel ?

On pose y = ln(N - 30). Si N - 30 = Ae^(ak), alors y = ak + ln(A), ce qui est affine en k. On ajuste les points transformés par les moindres carrés, puis on revient au modèle exprimé en N.

Q : Quelle loi utiliser pour compter les jours de panne sur 200 jours ?

Comme les jours sont indépendants et que la probabilité de panne est 0,025 par jour, X suit une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025. Son approximation de Poisson utilise λ = 200 × 0,025 = 5.

Q : Comment gérer le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre eux, avancez d'abord sur les questions accessibles et réservez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et la cohérence des conclusions.

Q : Comment conclure le test bilatéral sur le réglage de la machine ?

Sous H_0, on détermine l'intervalle central contenant 95 % des valeurs de $\bar{Z}$. Si la moyenne observée est dans cet intervalle, on ne rejette pas H_0 au seuil choisi ; si elle en est exclue, on la rejette.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2022/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Services et Prestations des Secteurs Sanitaire et Social : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.