Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Étude d'une fonction périodique par séries de Fourier** (10 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2023/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres, avec une vitesse en centimètres par seconde. L'étude porte sur une équation différentielle, les variations de la fonction, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les deux racines sont $\frac{-5-\sqrt{9}}{2}$ et $\frac{-5+\sqrt{9}}{2}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -4$ ou $r = -1$.

Question 1.b. **Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.**

1. L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes : -1 et -4.
2. Le tableau fourni donne alors une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. **À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).**

La fonction donne la distance OM en centimètres : à l'instant initial, cette distance vaut 20 cm. Sa dérivée représente la vitesse de déplacement de M par rapport à O, donnée dans l'énoncé comme négative.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression donnée :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

La distance OM est donc donnée exactement par cette expression, en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3,16$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier la réponse.

La fonction est continue et $f(0) = 20 > 0,5$. À 4 secondes :

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427 < 0,5.$$

Le seuil est donc franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, chacun des termes exponentiels tend vers 0. La limite de leur combinaison est donc 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

> La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t de l'intervalle [0 ; +∞[.

En dérivant chaque terme avec $(e^{at})' = ae^{at}$, on obtient

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	$-$
Variations de f	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en calculant f(t) arrondie au centième et en indiquant si la condition est vraie ou fausse, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Ajouter des lignes si nécessaire.**

La condition est vraie tant que $f(t) > 0,5$. Le tableau se complète ainsi, avec les valeurs de $f(t)$ arrondies au centième :

Ligne	t	$f(t)$	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à $t = 3,9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

1. À $t = 3,8$, la condition est vraie puisque $f(3,8) \approx 0,52 > 0,5$.
2. Après l'incrément de 0,1, elle devient fausse à $t = 3,9$, puisque $f(3,9) \approx 0,47 < 0,5$.

La variable conserve alors cette dernière valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé à cet instant.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi,

$$m = \frac{1}{4}\left(F(4) - F(0)\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) + \frac{5}{6}(e^{-16} - 1)\right].$$

En regroupant les termes, on obtient l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

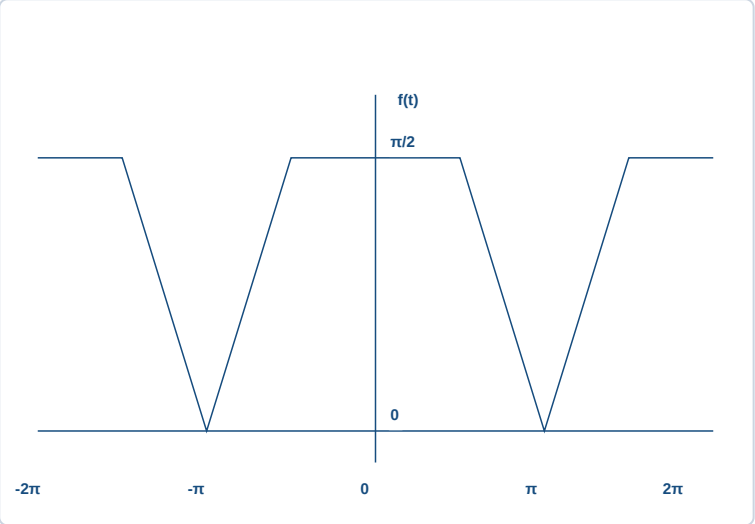
2. Étude d'une fonction périodique par séries de Fourier

La fonction étudiée est paire, de période 2π, et définie par morceaux sur [0 ; π]. Les questions portent sur son graphique et ses coefficients de Fourier, puis sur l'approximation de sa valeur efficace à l'aide des trois premiers coefficients.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa période.

Sur l’intervalle ext{[-2 ext{pi},2 ext{pi}]}, le motif se répète tous les ext{2 ext{pi}}. Il est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées : la fonction vaut ext{pi/2} entre ext{-pi/2} et ext{pi/2}, puis décroît ou croît linéairement jusqu’à 0 en ext{-pi} et ext{pi}. On reporte ce motif par périodicité jusqu’aux bornes.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Motif répété de période ext{2 ext{pi}} : plateaux à ext{pi/2}, zéros en ext{-pi} et ext{pi}.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction *f* est paire et *sin(nt)* est impaire : leur produit est impair. Sur l’intervalle symétrique ext{[-pi,pi]}, l’intégrale de ce produit est donc nulle. La formule de Fourier appliquée sur une période donne ainsi, pour tout entier ext{n ext{>=}1}, ext{b_n=1/pi int_{-pi}^{pi} f(t)sin(nt)dt=0}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier ext{n ext{>=}1}, ext{b_n=0}.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La fonction est périodique de période ext{T=2pi}. D’après le formulaire, sa pulsation vaut ext{omega=2pi/T}. En remplaçant ext{T} par ext{2pi}, on obtient ext{omega=2pi/(2pi)=1}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

ext{omega=1}.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier vaut $a_0 = 3\pi/8$.

Par périodicité et parité, ext{a_0=1/pi int_0^pi f(t)dt}. Sur ext{[0,pi/2]}, l'aire sous la courbe est celle d'un rectangle de dimensions ext{pi/2} et ext{pi/2}, soit ext{pi^2/4}. Sur ext{[pi/2,pi]}, elle vaut ext{pi^2/8}. Donc ext{a_0=(pi^2/4+pi^2/8)/pi=3pi/8}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

ext{a_0=3pi/8}.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Pour une fonction paire de période ext{2pi}, le formulaire donne ext{a_n=2/pi int_0^pi f(t)cos(nt)dt}. On partage cette intégrale au point où l'expression de *f* change : ext{f(t)=pi/2} sur ext{[0,pi/2]}, puis ext{f(t)=pi-t} sur ext{[pi/2,pi]}. En remplaçant, le premier facteur ext{2/pi} s'annule avec ext{pi/2} dans le premier terme, ce qui donne exactement l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

ext{a_n=int_0^{pi/2}cos(nt)dt+(2/pi)int_{pi/2}^{pi}(pi-t)cos(nt)dt}.

Question 6. En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)[\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)]$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

Dans la formule admise, pour ext{n=1}, la différence des cosinus vaut ext{0-(-1)=1}. Pour ext{n=2}, elle vaut ext{-1-1=-2}. Pour ext{n=3}, elle vaut ext{0-(-1)=1}. En multipliant chaque différence par ext{2/(pi n^2)}, on obtient les trois coefficients.

✓ RÉPONSE À RETENIR

ext{a_1=2/pi}, ext{a_2=-1/pi}, ext{a_3=2/(9pi)}.

Question 7. Déduire l'expression de $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est ext{s_3(t)=a_0+sum_{n=1}^3(a_n cos(nt)+b_n sin(nt))}. Les coefficients ext{b_n} sont nuls. En y substituant ext{a_0=3pi/8} et les valeurs exactes de ext{a_1,a_2,a_3} obtenues à la question précédente, on retrouve l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

ext{s_3(t)=3pi/8+(2/pi)cos(t)-(1/pi)cos(2t)+(2/(9pi))cos(3t)}.

Question 8. Parmi les trois courbes proposées, indiquer sans justification celle qui est associée à la fonction s_3.

La somme partielle ext{s_3} présente un maximum près de ext{t=0} et des minima près de ext{t=±pi}. Parmi les tracés proposés, cela correspond à la courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En utilisant les coefficients exacts, ext{P=(3pi/8)^2+1/2[(2/pi)^2+(-1/pi)^2+(2/(9pi))^2]}. Ainsi, ext{P=9pi^2/64+409/(162pi^2)}. L'évaluation numérique, arrondie à quatre décimales conformément à la précision demandée, donne la valeur annoncée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

ext{P approx 1,6437}.

Question 9.b. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le pourcentage d'erreur est d'environ ext{0,074 %}. Parmi les trois choix proposés, la valeur la plus proche est ext{0,1 %}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Ses deux exercices, notés chacun sur 10, évaluent la modélisation de la fermeture d'un tiroir et l'étude d'une fonction périodique par séries de Fourier.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ détermine les solutions exponentielles.
- La distance du tiroir est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, en centimètres, avec t exprimé en secondes.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle s_3 associe le terme constant et les trois premiers termes cosinus du développement de Fourier.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le sens physique des données : f(0) est une distance et f'(0) une vitesse signée.
- Relier explicitement la limite de f(t) en $+\infty$ à l'équation de l'asymptote horizontale.
- Dans l'algorithme, vérifier la condition à chaque pas et repérer la première valeur de t pour laquelle elle devient fausse.
- Pour Fourier, utiliser la parité et la période sans oublier les facteurs propres aux formules des coefficients.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la partie A ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{r1t} + C_2e^{r2t}$. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et la fonction sinus est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique centré en zéro est nulle. En utilisant la périodicité, cela établit que chaque coefficient b_n est nul.

Q : Comment gérer le temps et le barème de l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices notés chacun sur 10 points. Le sujet ne donne pas de répartition des points par question. Répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les réponses.

Q : Quels éléments de méthode faut-il rendre visibles pour être évalué correctement ?

Présentez les étapes utiles, les unités et les conclusions demandées, notamment pour les limites, les variations et l'interprétation de l'algorithme. Pour la question à choix multiples, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btssp3s.fr/assets/annales/bts-sp3s/E2 - Mathématiques/2023/BTS SP3S - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Services et Prestations des Secteurs Sanitaire et Social : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.